Structuri algebrice

1. Fie $M \neq \emptyset$. Se numeste **lege de compozitie interna** pe **M** orice functie **f:** $M \times M \to M$.
Daca $x, y \in M$ atunci **f(x,y)** este **compusul** elementelor **x** si **y** prin legea **f.**

2. Fie "*" o lege de compozitie definita pe $M \neq \emptyset$ si $A \subset M$, $A \neq \emptyset$. Spunem ca **A** este **parte stabila** a lui **M** in raport cu legea "*" daca oricare ar fi **x, y** din **A** avem $x*y \in A$.

3. Proprietati ale legilor de compozitie:
Fie $M \neq \emptyset$ pe care s-a definit legea de compozitie interna "*".

- **Comutativitatea:** spunem ca legea de compozitie "*" este **comutativa** daca $\forall\ x, y \in M$, avem $x*y = y*x$.
- **Asociativitatea:** spunem ca legea de compozitie "*" este **asociativa** daca $\forall x, y, z \in M$, avem $(x*y)*z = x*(y*z)$.
- **Element neutru:** spunem ca $e \in M$ este **element neutru** al legii de compozitie "*" daca $\forall x \in M$ avem $x*e = e*x = x$.

4. Fie $M \neq \emptyset$ pe care s-a definit o lege de compozitie interna notata "*".
Spunem ca legea "*" defineste pe **M** o structura algebrica de **monoid** daca:

a) legea "*" este asociativa pe **M;**
b) legea "*" admite element neutru in **M.**

Monoidul se noteaza **(M,*).**

5. Un monoid **(M,*)** se numeste **monoid comutativ** daca legea "*" este comutativa.

6. Fie **(M,*)** un monoid cu element neutru **e.** Spunem ca $x \in M$ este **simetrizabil** in raport cu legea "*" daca exista $x' \in M$ astfel incat $x*x'=x'*x = e$. **x'** se numeste **simetricul** lui **x.**

7. Fie **G** o multime nevida pe care s-a definit o lege de compozitie notata *".
Spunem ca legea de compozitie „*" defineste o structura de **grup** pe multimea **G** daca:

i) legea „*" este asociativa;
ii) legea „*" are element neutru notat cu **e**;
iii) orice element **x** al lui **G** este simetrizabil.

Spunem ca **(G,*)** este **grup** daca **(G,*)** este un **monoid cu toate elementele simetrizabile.**
Daca **G** este o multime finita grupul se numeste **grup finit** si numarul de elemente al lui **G** reprezinta **ordinul grupului.**
Daca legea „*" este comutativa spune ca **G** este **grup comutativ** sau **abelian.**

8. Reguli de calcul intr-un grup:
Fie $(G,\cdot)$ un grup multiplicativ atunci avem:

i) Daca $x, y \in G$ atunci $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$,
ii) Daca $x, y, z \in G$ si $x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y$ **(simplificare la dreapta)**,
iii) Daca $x, y, z \in G$ si $z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y$ **(simplificare la stanga)**,
iv) Daca $a, b \in G$ atunci: ecuatia $a \cdot x = b$ are solutie unica $x = a^{-1} b$,
ecuatia $x \cdot a = b$ are solutie unica $x = b^{-1} a$.

9. Fie **(G,*)** un grup si $H \subset G$ parte stabila a lui **G.** Daca **(H,*)** este un grup fata de aplicatia indusa spunem ca **(H,*)** este **subgrup** al lui **(G,*).**

10. Fie **$(G,\circ)$** este un grup finit si **$a \in G$.** Se numeste **ordinul elementului a** cel mai mic numar **$n \in N^*$** pentru care **$a^n = e$** si se scrie **ord a = n.**
Daca **ord a = 1** atunci **a = e.**

11. Fie **$(G_1, \perp)$** si **$(G_2, \top)$** doua grupuri. Se numeste **morfism** de la grupul **$(G_1, \perp)$** la grupul **$(G_2, \top)$** o functie **$f: G_1 \to G_2$** astfel incat **$f(x \perp y) = f(x) \top f(y)$** pentru orice **$x, y \in G_1$.**
Daca **f** este morfism bijectiv atunci **f** se numeste **izomorfism.**
Un izomorfism definit pe acelasi grup (de la grupul **(G,*)** la grupul **(G,*)**) se numeste **automorfism.**

12. Consideram o multime **$A \neq \emptyset$** inzestrata cu doua legi de compozitie interna notate cu **"+"**, **"·".**
$(A, +, \cdot)$ este un **inel** daca:

i) **$(A, +)$** este grup abelian,
ii) **$(A, \cdot)$** este monoid,
iii) legea **"·"** este distributiva fata de legea **"+"** , adica:
   $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (**distributiva la stanga**) si
   $(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ (**distributiva la dreapta**).

Daca legea **"·"** este comutativa spune ca **$(A, +, \cdot)$** este **inel abelian** sau **comutativ**.

13. Daca **A** este un inel si **$x, y \in A$** doua elemente diferite de elementul **0** **$(x \neq 0, y \neq 0)$** au proprietatea **$x \cdot y = 0$** spunem ca **x** si **y** sunt **divizori ai lui 0** iar inelul **A are divizori ai lui 0.**

14. Un inel comutativ **$(A, +, \cdot)$** cu **$0 \neq 1$** si fara divizori ai lui zero se numeste **domeniu de integritate**.

15. Se numeste **corp** un inel **$(K, +, \cdot)$** in care **$0 \neq 1$** (elementul zero este diferit de elementul unitate) si orice element **$x \in K$, $x \neq 0$** este simetrizabil fata de inmultire (a doua lege a inelului).
Daca inmultirea este comutativa corpul se numeste **corp comutativ**.

16. Fie **$(A, +, \cdot)$** si **$(B, *, \circ)$** doua inele (corpuri).
Un **morfism de la $(A, +, \cdot)$ la $(B, *, \circ)$** este o functie **$f: A \to B$** astfel incat:

i) **$f(x + y) = f(x) * f(y) \ \forall x, y \in A$,**
ii) **$f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y) \ \forall x, y \in A$,**
ii) **$f(1_A) = f(1_B)$.**

Un morfism de inele (corpuri) se numeste **izomorfism** daca este bijectiv.

Rezumat:

<table>
<tr><th>Multime</th><th>Lege de compozitie</th><th>Proprietatile legii de compozitie</th><th colspan="4">Structura</th></tr>
<tr><td rowspan="24">A</td><td rowspan="7">*: AxA → A</td><td>- asociativitate</td><td rowspan="2">(A, *)
Monoid</td><td rowspan="3">(A, *)
Monoid
comutativ</td><td rowspan="7" colspan="2"></td></tr>
<tr><td>- ∃ element neutru notat „0”</td></tr>
<tr><td>- comutativitate</td><td></td></tr>
<tr><td>- asociativitate</td><td rowspan="3">(A, *)
Grup</td><td rowspan="4">(A, *)
Grup comutativ</td></tr>
<tr><td>- ∃ element neutru notat „0”</td></tr>
<tr><td>- orice element x al lui A este simetrizabil</td></tr>
<tr><td>- comutativitate</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">*: AxA → A</td><td>- asociativitate</td><td rowspan="4" colspan="2">(A, *)
Grup comutativ</td><td rowspan="7">(A, *, ∘)
Inel</td><td rowspan="8">(A, *, ∘)
Inel
comutativ</td></tr>
<tr><td>- ∃ element neutru notat„0”</td></tr>
<tr><td>- orice element x al lui A este simetrizabil</td></tr>
<tr><td>- comutativitate</td></tr>
<tr><td rowspan="4">∘ : AxA → A</td><td>- asociativitate</td><td rowspan="2" colspan="2">(A, ∘)
Monoid</td></tr>
<tr><td>- ∃ element neutru notat „1”</td></tr>
<tr><td>- legea “ ∘ ”este distributiva la stanga si la dreapta fata de legea “*”</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>- comutativitate</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">*: AxA → A</td><td>- asociativitate</td><td rowspan="4" colspan="2">(A, *)
Grup comutativ</td><td rowspan="8">(A, *, ∘)
Corp</td><td rowspan="9">(A, *, ∘)
Corp
comutativ</td></tr>
<tr><td>- ∃ element neutru notat „0”</td></tr>
<tr><td>- orice element x al lui A este simetrizabil.</td></tr>
<tr><td>- comutativitate</td></tr>
<tr><td rowspan="5">∘ : AxA → A</td><td>- asociativitate</td><td rowspan="2" colspan="2">(A, ∘)
Monoid</td></tr>
<tr><td>- ∃ element neutru notat „1”</td></tr>
<tr><td>- orice element x a lui A, diferit de „0” este simetrizabil</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>- legea “ ∘ ”este distributiva la stanga si la dreapta fata de legea “*”</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>- comutativitate</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>