Functii – definitie, proprietati, grafic, functii elementare

A. Definitii, proprietatile functiilor

1. Fiind date doua multimi X si Y spunem ca am definit **o functie** (aplicatie) pe X cu valori in Y daca fiecarui element $x \in X$ facem sa-i corespunda un singur element $y \in Y$.

Vom nota f: $X \to Y$, y = f(x).
x – se numeste **variabila** sau **argument**,
y – se numeste **valoarea functiei**,
X – se numeste **multimea de definitie**
Y – se numeste **multimea valorilor functiei.**

2. Daca $X \subseteq \mathbf{R}$ si $Y \subseteq \mathbf{R}$ vom spune ca f(x) este **functie reala de variabila reala**.

3. Daca X_1 este o submultime a lui X ($X_1 \subset X$) functia $f_1(x)$ definita pe X_1 si egala cu f(x) pe aceasta submultime ($f_1(x) = f(x)$ $(\forall)$ $x \in X_1$) se numeste **restrictia** lui f(x) la X_1.
Invers, f(x) se numeste **prelungirea** lui $f_1(x)$ pe X.

4. Spunem ca functia f: $X \to Y$ este **descrescatoare** daca $(\forall)$ $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ avem

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0.$$

5. Spunem ca functia f: $X \to Y$ este **crescatoare** daca $(\forall)$ $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ avem

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0.$$

6. f: $X \to Y$ este **marginita** daca exista doua numere reale m, M astfel incat $(\forall)$ $x \in X$ avem

$$m < f(x) < M.$$

7. Spunem ca functia f: $X \to Y$ este **injectiva** daca este verificata una din urmatoarele conditii:

a) $(\forall)$ $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ sau
b) $(\forall)$ $x_1, x_2 \in X$, astfel incat $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ sau
c) $(\forall)$ $y \in Y$ ecuatia f(x) = y are <u>cel mult</u> o solutie in X.

Cele trei conditii sunt echivalente. In rezolvarea exercitiilor poate fi folosita oricare din ele.

8. Spunem ca functia f: $X \to Y$ este **surjectiva** daca este satisfacuta una din urmatoarele conditii:

a) $(\forall)$ $y \in Y$, $(\exists)$ $x \in X$ astfel incat f(x) = y sau
b) $(\forall)$ $y \in Y$ ecuatia f(x) = y are <u>cel putin</u> o solutie in X.
c) f(X) = Y

Cele trei conditii sunt echivalente. In rezolvarea exercitiilor poate fi folosita oricare din ele.

9. O functie f: $X \to Y$ este **bijectiva** daca este **injectiva** si **surjectiva.**

10. f: $X \to Y$ este **bijectiva** $\Leftrightarrow$ $(\forall)$ $y \in Y$ ecuatia f(x) = y are o singura solutie in X.

11. Daca $f : X \to Y$ si $g : Y \to Z$, functia notata $gof : X \to Z$ unde $(gof)(x) = g(f(x))$ se numeste **compusa** functiilor g(x) si f(x).

12. 1_X este **functia identica** definita pe X: $1_x : X \to X$, $1_X(x) = x$, $(\forall)\ x \in X$.

13. Spunem ca functia $f : X \to Y$ este **inversabila** daca exista o functie $g : Y \to X$ astfel incat $(gof)(x) = 1_X(x)$ si $(fog)(y) = 1_Y(y)$.
Inversa functiei f(x) se noteaza cu $f^{-1}(x)$.

14. Functia $f : X \to Y$ este **inversabila** daca si numai daca f(x) este **bijectiva**.

15. Functia $f : X \to Y$ este **para** daca f(x) = f(-x) $(\forall)\ x \in X$ (X este o multime simetrica fata de 0).

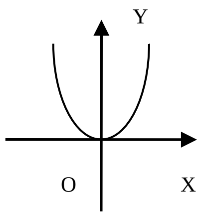
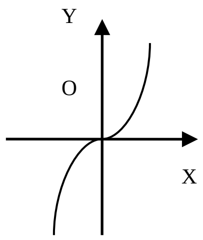
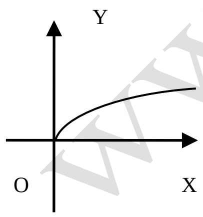
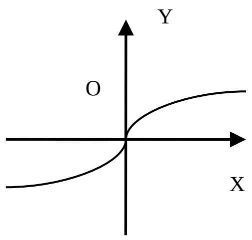
16. Functia $f : X \to Y$ este **impara** daca f(x) = - f(x) $(\forall)\ x \in X$ (X este o multime simetrica fata de 0).

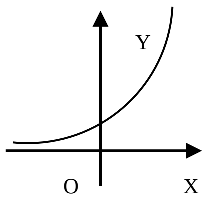
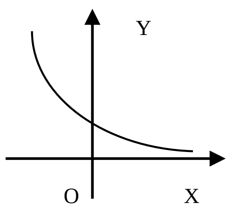
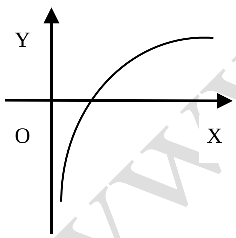
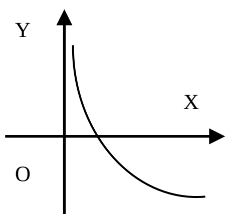
17. Functia $f : X \to Y$ este **periodica, de perioada T,** daca $(\exists)\ T \in R^*$ astfel incat

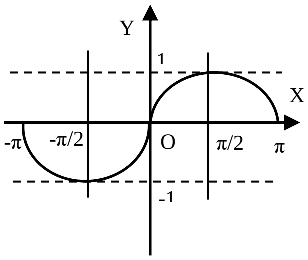
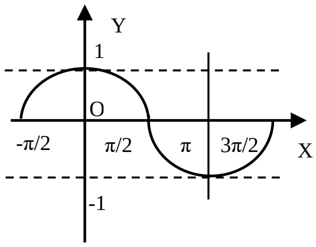
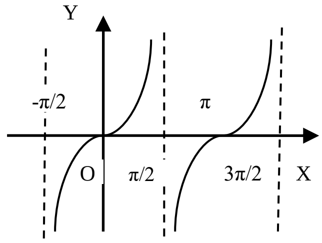
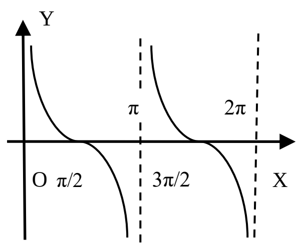
$x + T \in X$ si $f(x + T) = f(x)$ $(\forall)\ x \in X$.

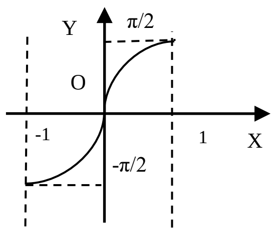
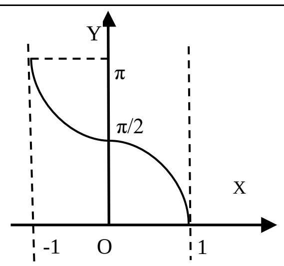
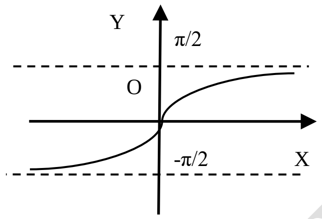
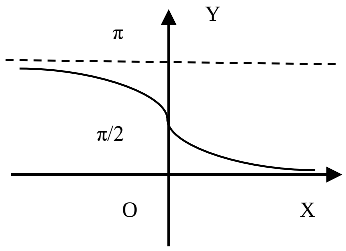
Cel mai mic dintre aceste numere T pozitive se noteaza cu T^* si se numeste perioada principala.

B. Functii elementre – proprietati, grafic

FUNCTIA	X	Y	PROPRIETATI
<u>FUNCTIA PUTERE</u> f: X→Y, f(x) = x^n, n∈N, n ≥ 2			
<u>Graficul functiei putere</u> *a) n par* 	**R**	$[0,+\infty)$	i) f(x) este descrescatoare pe $(-\infty,0]$ si crescatoare pe $[0,+\infty)$ ii) f(x) este para iii) f(x) nu este injectiva pe **R** dar restrictiile ei la $(-\infty, 0]$ si la $[0, +\infty)$ sunt functii injective iv) f(x) este surjectiva pe **R** v) f(x) nu este bijectiva pe **R** dar restrictiile $f\big\rvert_{(-\infty,0]} : (-\infty,0] \to [0,+\infty)$ si $f\big\rvert_{[0,\infty)} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ sunt bijective
b) n impar 	**R**	**R**	i) f(x) este crescatoare pe **R** ii) f(x) este impara ii) f(x) este injectiva pe **R** iii) f(x) este surjectiva pe **R** iv) f(x) este bijectiva pe **R** v) f: **R**→**R** este inversabila iar inversa ei este f^{-1}: **R**→**R**, $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$
<u>FUNCTIA RADICAL</u> f: X→Y, f(x) = $\sqrt[n]{x}$, n∈N, n ≥ 2			
<u>Graficul functiei radical</u> *a) n par* 	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	i) f(x) este crescatoare pe $[0,+\infty)$ ii) f(x) este injectiva pe $[0,+\infty)$ iii) f(x) este surjectiva pe $[0,+\infty)$ iv) f(x) este bijectiva pe $[0,+\infty)$ v) f: $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ este inversabila iar inversa ei este $f^{-1}: [0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $f^{-1}(x)= x^n$
b) n impar 	**R**	**R**	i) f(x) este crescatoare pe **R** ii) f(x) este impara iii) f(x) este injectiva pe **R** iv) f(x) este surjectiva pe **R** v) f(x) este bijectiva pe **R** vi) f: **R**→**R** este inversabila iar inversa ei este f^{-1}: **R**→**R**, $f^{-1}(x) = x^n$.

FUNCTIA	X	Y	PROPRIETATI
<u>FUNCTIA EXPONENTIALA</u> **f: X→Y f(x) = a^x, a > 0, a ≠ 1**			
<u>Graficul functiei exponentiale</u> *a) a > 1* 	**R**	$(0,+\infty)$	i) f(x) este crescatoare pe **R** ii) f(x) este injectiva pe **R** iii) f(x) este surjectiva pe **R** iv) f(x) este bijectiva pe **R** v) f: **R** → $(0,+\infty)$ este inversabila iar inversa ei este $f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$.
b) a ∈ (0, 1) 	**R**	$(0,+\infty)$	i) f(x) este descrescatoare pe **R** ii) f(x) este injectiva pe **R** iii) f(x) este surjectiva pe **R** iv) f(x) este bijectiva pe **R** v) f: **R** → $(0, +\infty)$ este inversabila iar inversa ei este $f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$.
<u>FUNCTIA LOGARITMICA</u> **f(x) = $\log_a x$, a > 0, a ≠ 1**			
<u>Graficul functiei logaritmice</u> a) a > 1 	$(0,+\infty)$	**R**	i) f(x) este crescatoare pe $(0,+\infty)$ ii) f(x) este injectiva pe $(0,+\infty)$ iii) f(x) este surjectiva pe $(0,+\infty)$ iv) f(x) este bijectiva pe $(0,+\infty)$ v) f: $(0, +\infty)$ → **R** este inversabila iar inversa ei este $f^{-1}: \mathbf{R} \to (0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = a^x$.
b) a ∈ (0, 1) 	$(0,+\infty)$	**R**	i) f(x) este descrescatoare pe $(0,+\infty)$ ii) f(x) este injectiva pe $(0,+\infty)$ iii) f(x) este surjectiva pe $(0,+\infty)$ iv) f(x) este bijectiva pe $(0,+\infty)$ v) f: $(0,+\infty)$ → **R** este inversabila iar inversa ei este $f^{-1}: \mathbf{R} \to (0,+\infty)$, $f^{-1}(x) = a^x$.

FUNCTIA	X	Y	PROPRIETATI
<u>FUNCTIA SINUS</u> f: X $\rightarrow$ Y, f(x) = sin x			
	**R**	[-1, 1]	i) f(x) este marginita ii) f(x) este impara iii) f(x) este periodica cu perioada T= 2kπ , k $\in$ **Z**, $T^*=2\pi$ este perioada principala. iv)f(x) nu este injectiva pe **R** dar restrictia la $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ este injectiva v) f(x) este surjectiva pe **R** vi) f(x) nu este bijectiva pe **R** dar restrictia f: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\rightarrow$[-1,1] este: - crescatoare si bijectiva Inversa sa este f^{-1} : [-1,1]$\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, f^{-1}(x)= arcsin(x).
<u>FUNCTIA COSINUS</u> f: X $\rightarrow$ Y, f(x) = cos x			
	**R**	[-1, 1]	i) f(x) este marginita ii) f(x) este para iii) f(x) este periodica cu perioada T= 2kπ , k $\in$ **Z** $T^*=2\pi$ este perioada principala. iv) f(x) nu este injectiva pe **R** dar restrictia la [0, π] este injectiva v) f(x) este surjectiva pe **R** vi) f(x) nu este bijectiva pe **R** dar restrictia f: [0, π]$\rightarrow$[-1,1] este: - descrescatoare si bijectiva Inversa functia f^{-1} : [-1,1] $\rightarrow$ [0, π], f^{-1} (x)= arccos(x).
<u>FUNCTIA TANGENTA</u> f: X $\rightarrow$ Y, f(x) = tg x			
	**R**$\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$	**R**	i) f(x) este impara ii) f(x) este periodica cu perioada T = kπ , k $\in$ **Z** $T^*=\pi$ este perioada principala. iii) f(x) nu este injectiva pe **R**$\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ dar restrictia la $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ este o functie injectiva iv) f(x) este surjectiva pe **R**$\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ v) f(x) nu este bijectiva pe **R**$\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$ dar restrictia f: $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow$**R** este crescatoare si bijectiva, si are ca inversa functia f^{-1} : **R**$\rightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, f^{-1} (x)=arctg (x).
<u>FUNCTIA COTANGENTA</u> f: X $\rightarrow$ Y, f(x) = ctg x			
	**R**$\setminus$ {kπ,k$\in$**Z**}	**R**	i) f(x) este impara ii) f(x) este periodica cu perioada T = kπ , k $\in$ **Z** $T^*=\pi$ este perioada principala. iii) f(x) nu este injectiva pe **R**$\setminus$ {kπ,k$\in$**Z**}, dar restrictia la $(0,\pi)$ este o functie injectiva iv) f(x) este surjectiva pe **R**$\setminus$ {kπ,k$\in$**Z**} v) f(x) nu este bijectiva pe **R**$\setminus$ {kπ,k$\in$**Z**} dar restrictia f: $(0,\pi)\rightarrow$**R** este descrescatoare si bijectiva, si are ca inversa functia f^{-1} : **R**$\rightarrow(0,\pi)$, f^{-1} (x)= arcctg (x).

FUNCTIA	X	Y	PROPRIETATI
FUNCTIA ARCSINUS **f: X $\rightarrow$ Y, f(x) = arcsin x**			
	[-1, 1]	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	i) f(x) este marginita ii) f(x) este impara iii) f(x) este crescatoare pe [-1, 1] iv) f(x) este injectiva pe [-1, 1] v) f(x) este surjectiva pe [-1, 1] vi) f(x) este bijectiva pe [-1, 1] vii) f(x) este inversabila pe [-1, 1] iar inversa este $f^{-1}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow$ [-1,1], $f^{-1}(x) = \sin x$
FUNCTIA ARCCOSINUS **f: X $\rightarrow$ Y, f(x) = arccos x**			
	[-1, 1]	$[0, \pi]$	i) f(x) este marginita ii) $f(-x) = \pi - f(x)$, $\forall$ x $\in$ [-1, 1] iii) f(x) este descrescatoare pe [-1, 1] iv) f(x) este injectiva pe [-1, 1] v) f(x) este surjectiva pe [-1, 1] vi) f(x) este bijectiva pe [-1, 1] vii) f(x) este inversabila pe [-1, 1] iar inversa este $f^{-1}: [0, \pi] \rightarrow$ [-1,1], $f^{-1}(x) = \cos x$
FUNCTIA ARCTANGENTA **f: X $\rightarrow$ Y, f(x) = arctg x**			
	**R**	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	i) f(x) este marginita ii) f(x) este impara iii) f(x) este crescatoare pe **R** iv) f(x) este injectiva pe **R** v) f(x) este surjectiva pe **R** vi) f(x) este bijectiva pe **R** vii) f(x) este inversabila pe **R** iar inversa este $f^{-1}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$ **R**, $f^{-1}(x) = \text{tg } x$
FUNCTIA ARCCOTANGENTA **f: X $\rightarrow$ Y, f(x) = arcctg x**			
	**R**	$(0, \pi)$	i) f(x) este marginita ii) $f(-x) = \pi - f(x)$, $(\forall)$ x $\in$ **R** iii)f(x) este descrescatoare pe **R** iv) f(x) este injectiva pe **R** v) f(x) este surjectiva pe **R** vi) f(x) este bijectiva pe **R** vii)f(x) este inversabila pe **R** iar inversa este $f^{-1}: (0, \pi) \rightarrow$ **R**, $f^{-1}(x) = \text{ctg } x$