Combinatorica. Binomul lui Newton.

1. Produsul $\mathbf{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}$ il notam **n!** si se citeste **n factorial.** Prin conventie **0! = 1.**

2. Proprietati:
   a. $\mathbf{(n+1)! = (n+1)\cdot n!}$,
   b. $\mathbf{(n+1)! - n! = n\cdot n!}$,
   c. $\mathbf{\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}}$.

3 Fie A=$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o multime nevida care contine n elemente. Se numeste **permutare a multimii A**, o multime ce contine toate elementele lui A carora li s-au fixat un loc in aceasta multime. Multimea **permutarilor lui A** se noteaza cu $\mathbf{P_n}$ si se calculeaza astfel $\mathbf{P_n = n!}$

4. Fie **A** =$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o multime nevida care contine n elemente. O permutare este un sir de numere determinat de functia injectiva $\mathbf{f:\{1, 2, \ldots, n\} \to A}$ reprezentata prin tabloul,
$\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots\ldots i\ldots\ldots n \\ a_1 & a_2\ldots\ldots a_i\ldots\ldots a_n \end{pmatrix}$ unde daca $\mathbf{i \neq j \Leftrightarrow a_i \neq a_j}$, care fixeaza locul fiecarui element

5. Fie A o multime nevida care contine n elemente. O submultime ordonata a lui **A** de **k** elemente $\mathbf{(k \leq n)}$ se numeste **aranjament de n luate cate k.**

Numarul acestor submultimi se noteaza $\mathbf{A_n^k}$ si se citeste **"aranjamente de n luate cate k"** si se calculeaza astfel $\mathbf{A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$.

6. <u>Formule uzuale</u>:

   a. $\mathbf{A_n^k = n\,A_{n-1}^{k-1}}$, $\mathbf{A_n^k = n(n-1)\,A_{n-2}^{k-2}}$;

   b. $\mathbf{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$;

   c. $\mathbf{A_n^k = (n-k+1)\,A_n^{k-1}}$;

   d. $\mathbf{A_n^n = P_n}$.

7. Fie A o multime nevida care contine n elemente. O submultime a lui **A** de **k** elemente $\mathbf{(n \geq k)}$ se numeste **combinare de n elemente luate cate k.**

Numarul acestor submultimi se noteaza $\mathbf{C_n^k}$ si se citeste **" combinari de n luate cate k"** si se calculeaza astfel $\mathbf{C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}}$ sau $\mathbf{C_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}}$.

8. <u>Formule uzuale</u>:

a. $\mathbf{C_n^0 = C_n^n = 1}$,

b. $\mathbf{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$,

c. $\mathbf{C_n^k = C_n^{n-k}}$ **(**$\mathbf{C_n^k, C_n^{n-k}}$ **combinari complementare);**

d. $\mathbf{C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k}$,

e. $\mathbf{C_n^k = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}}$,

f. $\mathbf{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}}$

9. **Binomul lui Newton**: $\mathbf{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n}$.
$\mathbf{C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n}$ se numesc **coeficienti binomiali.**

10. Pentru **n = 2 si n = 3** avem:
$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$;
$\mathbf{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$;

11. $\mathbf{(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n}$.

12. Formule:
$\mathbf{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n}$.
$\mathbf{C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}}$.

13. **Termenul de ordinul k+1** din dezvoltarea Binomului lui Newton $\mathbf{(a+b)^n}$ se noteaza $\mathbf{T_{k+1}}$ si avem $\mathbf{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$.

14. **Termenul de ordinul k+1** din dezvoltarea Binomului lui Newton $\mathbf{(a-b)^n}$ se noteaza $\mathbf{T_{k+1}}$ si avem $\mathbf{T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k}$.

15. Proprietati:

a. Binomul lui Newton are n + 1 termeni,
b. In fiecare termen suma puterilor lui a si b este egala cu n.