Rezolvarea ecuatiilor irationale

Ecuatiile irationale sunt ecuatiile care contin necunoscuta x sub semnul radical.
Etape in rezolvarea ecuatiilor irationale:

1. **Analizam radicalii din ecuatie pentru a stabili daca trebuie impuse conditii de existenta a acestor radicali . Daca avem radicali de ordin par atunci trebuie impuse asemenea conditii (expl.: expresia de sub radical trebuie sa fie $\geq$ 0) . Solutia finala trebuie sa verifice aceste conditii;**
2. **Eliminam radicalii prin diferite metode: ridicare la putere, introducerea unor necunoscute auxiliare si rezolvarea unui sistem de ecuatii, etc.;**
3. **Vom ajunge in final la o ecuatie algebrica de gradul I, II sau mai mare care trebuie rezolvata;**
4. **Verificam daca solutiile gasite verifica conditiile impuse la 1 si astfel determinam solutiile ecuatiei irationale.**

<u>Cateva tipuri de ecuatii</u>:

1. Ecuatii de tipul $\sqrt[n]{ax+b} = c$, unde a, b, c$\in$R,

a) n = 2(nr. par)$\Rightarrow$ $\sqrt{ax+b}$ = c trebuie impuse conditii de rezolvare ax + b$\geq$0 si c$\geq$0 deoarece nu sunt definiti radicalii de ordin par din numere negative.

Exemple:
i) $\sqrt{x+3} = 2$.
Rezolvare:
Conditie de rezolvare $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.
$(\sqrt{x+3})^2 = 2^2 \Leftrightarrow x + 3 = 4 \Leftrightarrow x = 1 > -3$. *Deci* $x = 1$ *verifica conditia de rezolvare* $\Rightarrow S = \{1\}$.

ii) $\sqrt{x+3} = -5$.
Rezolvare:
Deoarece $\sqrt{x+3} \geq 0$ *si* $-5 < 0 \Rightarrow$ *ecuatia nu are solutii* $\Rightarrow S = \emptyset$.

b) n = 3 (nr. impar) $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{ax+b}$ = c nu trebuie impuse conditii de rezolvare deoarece sunt definiti radicalii de ordin impar din numere negative

Exemple:
i) $\sqrt[3]{2x+5} = 3$.
Rezolvare:
Avand radicali de ordinul 3 nu sunt necesare conditii de existenta a radicalilor.
$\sqrt[3]{2x+5} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+5})^3 = 3^3 \Leftrightarrow 2x + 5 = 27 \Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11 \Rightarrow S = \{11\}$.

ii) $\sqrt[3]{3x-2} = -2$.
Rezolvare:
Avand radicali de ordinul 3 nu sunt necesare conditii de existenta a radicalilor.
$\sqrt[3]{3x-2} = -2 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x-2})^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow 3x - 2 = -8 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow S = \{-2\}$.

2. Ecuatii de tipul $\sqrt[n]{ax+b}$ = cx + d, unde a, b, c, d$\in$R,

a) n = 2 (nr. par)$\Rightarrow$ $\sqrt{ax+b}$ = cx + d trebuie impuse conditii de rezolvare $\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ cx+d \geq 0 \end{cases}$

Exemplu:
$\sqrt{3x+10} = x + 2$
Rezolvare:

Conditii de rezolvare $\begin{cases} 3x+10 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{10}{3} \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x \geq -2.$

$\sqrt{3x+10} = x + 2 \Leftrightarrow (\sqrt{3x+10})^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow 3x + 10 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0,$

$\Delta = 1 + 24 = 25$, $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -3 < -2$ *(deci nu este solutie)*, $x_2 = 2 \geq -2 \Rightarrow S = \{-2\}$.

b) n = 3 (nr. impar) $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{ax+b}$ = cx + d nu trebuie impuse conditii de rezolvare deoarece sunt definiti radicalii de ordin impar din numere negative

Exemplu:
$\sqrt[3]{13x+1} = x + 1.$
Rezolvare:
Avand radicali de ordinul 3 nu sunt necesare conditii de existenta a radicalilor.
$\sqrt[3]{13x+1} = x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{13x+1})^3 = (x+1)^3 \Leftrightarrow 13x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 3x - 10) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ sau $x^2 + 3x - 10 = 0$, $\Delta = 9 + 40 = 49$, $x_{2,3} = \dfrac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow x_2 = -5$, $x_3 = 2$

Deci $S = \{-5, 0, 2\}$.

3. Ecuatii de tipul $\sqrt[n]{ax+b} \pm \sqrt[n]{cx+d}$ = e, unde a, b, c, d, e$\in$R.

a) n = 2(nr. par)$\Rightarrow$ $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d}$ =e trebuie impuse conditii de rezolvare $\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ cx+d \geq 0 \end{cases}$.

Se noteaza $\sqrt{ax+b}$ = u si $\sqrt{cx+d}$ = v si se rezolva un sistem de 2 ecuatii in u si v.
A doua ecuatie se obtine prin ridicarea la puterea a 2-a a necunoscutelor u si v care se inmultesc cu coeficienti astfel incat prin adunarea/scadere sa eliminam necunoscuta x.

Exemple:
i) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} = 5.$
Rezolvare:

Conditii de rezolvare $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2, \infty).$

Notam $\sqrt{x+2} = u$ *si* $\sqrt{x+7} = v \Rightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u^2-v^2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ (u+v)(u-v)=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ 5(u-v)=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u-v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ 2+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2}=2 \\ \sqrt{x+7}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=4 \\ x+7=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$2u = 4$

$\Leftrightarrow x = 2 \in [-2, \infty) \Rightarrow S = \{2\}.$

ii) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3} = -3.$

Rezolvare:

Deoarece $\begin{cases}\sqrt{x+1}\ge 0\\ \sqrt{x+3}\ge 0\end{cases} \Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3} \ge 0$ *iar* $-3<0 \Rightarrow$ *ecuatia nu are solutii.*

b) n = 3 (nr. impar) $\Rightarrow \sqrt[3]{ax+b} \pm \sqrt[3]{ax+b} = e$, nu trebuie impuse conditii de rezolvare deoarece sunt definiti radicalii de ordin impar din numere negative.

Se noteaza $\sqrt[3]{ax+b} = u$ si $\sqrt[3]{ax+b} = v$ si avem de rezolvat un sistem de 2 ecuatii in u si v.

A doua ecuatie se obtine prin ridicarea la puterea a 3-a a necunoscutelor u si v care se inmultesc cu coeficienti astfel incat prin adunare/scadere sa eliminam necunoscuta x.

Exemplu:

$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{2x-1} = 1$

Rezolvare:

Avand radicali de ordinul 3 nu sunt necesare conditii de existenta a radicalilor.

Notam $\sqrt[3]{x-1} = u$; $\sqrt[3]{2x-1} = v \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}u+v=1\\ 2u^3-v^3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=1-u\\ 2u^3-(1-u)^3=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=1-u\\ 2u^3-(-u^3+3u^2-3u+1)=-1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}v=1-u\\ 3u^3-3u^2+3u=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=1-u\\ u(u^2-u+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=1-u\\ u=0\end{cases} \text{ sau } \begin{cases}v=1-u\\ u^2-u+1=0\end{cases}$$

$\begin{cases}v=1-u\\ u^2-u+1=0\end{cases}$ *Sistemul nu are solutii reale deoarece ecuatia* $u^2 - u + 1 = 0$ *nu are solutii reale pentru ca* $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$$\begin{cases}v=1-u\\ u=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=1\\ u=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{2x-1}=1\\ \sqrt[3]{x-1}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1=1\\ x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ x=1\end{cases} \Rightarrow S=\{1\}.$$